1. 3 年 4 班 27 號　施佑宜

$$\begin{cases} 2^y = 11x^2 + 2004 & \cdots\cdots ① \\ y = 3^{x^2+a} - 16 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

∵由①知y必>1

∴可知y必為固定之一正數，而所對應的x為等值異號的兩解

(y若有二解，則所對應的x有 4 解⇒不合)

∴所得解形式為$(+M , N) , (-M , N)$

故設A、B為$(\alpha , \beta) , (\alpha+ u , \beta)$代入①

$$\begin{cases} 2^\beta = 11\alpha^2 + 2004 \\ 2^\beta = 11(\alpha+u)^2 + 2004 = 11\alpha^2 + 88\alpha + 176 + 2004 \end{cases}$$ 得 $88\alpha+176=0$，$\alpha= -2$

故設A、B為$(-2 , 11) , (2 , 11)$代回②

得 $11=3^{u+a}-16$ ⇒ $3^{u+a}=27$ ⇒ $a= -1$

2. 1 年 26 班 28 號　蕭全佑

$x^2(y-1)+ y^2(x-1)=1$，令$x+y=a$、$xy=b$

原方程式 ⇒ $ab-(a^2-2b)=1$ ⇒ $ab-a^2+(1-2b)=0$

∵$a\in Z$　∴$\triangle=b^2-4(1-2b)=t^2$，$t\in N$ ⇒ $(b-4)^2-t^2=0$

$b+t-4$	10	-2
$b-t-4$	2	-10

b	2	-10
t	4	4

當$b=2$ ⇒ $a^2-2a-3=0$ ⇒ $a=3,-1$

若$a=3$，$b=2$ 則$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ or $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

若$a= -1$，$b=2$ 則無解

當$b= -10$ ⇒ $a^2+10a+21=0$ ⇒ $a= -3,-7$

若$a= -3$，$b= -10$ 則$\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=2 \end{cases}$ or $\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$

若$a= -7$，$b= -10$ 則無整數解

3. 依題意，$f(n)\in N$之嚴格增函數$n\in N$，且$f(f(n))=3n$

(1) $f(f(1))=3$ 且$f(1)\geq 1$

∴①若$f(1)=1$ ⇒ $f(f(1))= f(1)=1\neq 3$　∴→←

②若$f(1)=3$ ⇒ $f(f(1))= f(3)=3$　∴→←(∵f為嚴格增函數)

⇒ $f(1)=2$ ⇒ $f(f(1))= f(2)=3$

(2)∵$f(f(n))=3n$ ⇒ $f(f(f(n)))= f(3n)=3f(n)$

∴$f(3^k)=3f(3^{k-1})=\cdots=3^k\cdot f(1)==2\cdot 3^k$，$k\in N$

$f(2\cdot 3^k)=3\cdot f(2\cdot 3^{k-1})=\cdots=3^k\cdot f(2)==3^{k+1}$，$k\in N$

∵$f(2\cdot 3^k)-f(3^k)=3^k$且 $2\cdot 3^k-3^k=3^k$，$f(n+1)\geq f(1)+1$

∴$f(3^k+l)=2\cdot 3^k+l$，$l=1,2,3,\cdots,3^k$

(3)由(2)之结果：$f(3^k+l)=2\cdot 3^k+l$

$\Rightarrow\quad f(2\cdot 3^k+l)=f(f(3^k+l))=3(3^k+l)=3^{k+1}+3l$，$l=1,2,\cdots,3^k$

$\Rightarrow f(2004)=f(2\cdot 3^6+446)=3^7+3\cdot 446=3825$

4. ①$b_n=b_1+(n-1)\cdot d=1+(n-1)\cdot 3=3n-2$

$\{b_n\}\Rightarrow 1,4,7,10,\cdots,3n-2$

$$S_n=\log_a(1+1)+\log_a(1+\frac{1}{4})+\log_a(1+\frac{1}{7})+\cdots\log_a(1+\frac{1}{3n-2})$$

$$=\log_a[(1+1)(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{7})\cdots(1+\frac{1}{3n-2})]$$

$$\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}=\frac{1}{3}\log_a[3(n+1)-2]=\frac{1}{3}\log_a(3n+1)=\log_a\sqrt[3]{3n+1}$$

②故比 $(1+1)(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{7})\cdots(1+\frac{1}{3n-2})$ 與 $\sqrt[3]{3n+1}$ 大小

$n=1\quad (1+1)>\sqrt[3]{3n+1}$

$n=2\quad (1+1)(1+\frac{1}{4})>\sqrt[3]{3\times 2+1}=\sqrt[3]{7}$

設$n=k$時成立　$(1+1)(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{7})\cdots(1+\frac{1}{3k-2})>\sqrt[3]{3k+1}$

$n=k+1$ 時

$$(1+1)(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{7})\cdots(1+\frac{1}{3k-2})(1+\frac{1}{3k+1})>\sqrt[3]{3k+1}(1+\frac{1}{3k+1})=\frac{\sqrt[3]{3k+1}(3k+2)}{3k+1}$$

$$\left[\frac{\sqrt[3]{3k+1}(3k+2)}{3k+1}\right]^3-(\sqrt[3]{3k+4})^3=\frac{(3k+2)^3-(3k+4)(3k+1)^2}{(3k+1)^2}=\frac{9k+4}{(3k+1)^2}>0$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt[3]{3k+1}(3k+2)}{(3k+1)^2}>\sqrt[3]{3k+4}=\sqrt[3]{3(k+1)+1}$$ 故得證

$n=k+1$ 時　成立

由對數函數的單調性得之

故$a>1$ 時　$S_n>\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$

$0<a<1$ 時　$S_n<\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$

5. $\because\begin{cases}b_n+b_{n+1}=a_n & \cdots\cdots① \\ b_n\cdot b_{n+1}=(\frac{1}{3})^n & \cdots\cdots②\end{cases}$

由②知 $b_{n+1}\cdot b_{n+2}=(\frac{1}{3})^{n+1}$

$\frac{③}{②}$

$$\frac{b_{n+2}}{b_n}=\frac{1}{3} \qquad r=\frac{1}{3} \qquad \therefore\{b_n\}\text{等比數列}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+b_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}b_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_{n+1}$$

$$=(\sum_{i=0}^{\infty}b_{2i+1}+\sum_{i=1}^{\infty}b_{2i})+(\sum_{i=1}^{\infty}b_{2i}+\sum_{i=1}^{\infty}b_{2i+1})$$

$$=2(\sum_{i=1}^{\infty}b_{2i+1}+\sum_{i=1}^{\infty}b_{2i})-b_1$$

$$=2(\frac{k}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{3k}}{1-\frac{1}{3}})-k$$

$$=3k+\frac{1}{k}-k=\frac{2k^2+1}{k}$$