

國立台中一中合作盃數學金頭腦

第廿七次有獎徵答

收稿時間：93年4月5日~93年4月7日 16:00

- 說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「交件時間」、「班級」、「姓名」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓數學科辦公室外銀色的有獎徵答收稿信箱內。
(3)一張答案稿紙只能寫一個題目的解答，
如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙可至數學科辦公室索取。

1. $y = \log_2(11x^2 + 2004)$ 和 $y = 3^{x^2+a} - 16$ 交於 A 、 B 二點，若 $\overline{AB} = 4$ ，求 $a = ?$
2. 解方程式 $x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1$ 之所有整數解。
3. 函數 $f(n)$ 為定義在 \mathbb{N} (自然數集合) 之嚴格增函數，其值域也在 \mathbb{N} 中，且滿足 $f(f(n)) = 3n$ ，求 $f(2004) = ?$
4. 若 $\{b_n\}$ 為 **A.P.** (等差數列)，且 $b_1 = 1$ 、公差 $d = 3$ ，
另一數列 $\{a_n\}$ 且 $a_n = \log_a \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)$ ， $0 < a \neq 1$
令 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ，試比較 S_n 與 $\frac{1}{3} \log_a b_{n+1}$ 的大小並證明。
5. 設數列 $\{b_n\}$ 的相鄰兩項 b_n 及 b_{n+1} 為方程式 $3^n \cdot x^2 - 3^n \cdot a_n \cdot x + 1 = 0$ 的二根，又 $b_1 = k$ ， $k \in \mathbb{N}$ ，求
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ?$$
 (以 k 表示)