

國立臺中一中 合作盃數學金頭腦

第二十二次有獎徵答

投稿時間：91 年 12 月 11 日至 91 年 12 月 13 日

請務必寫明班級、姓名、時間，否則不予計分

1 求滿足 $(n+3)|(n^7 + 1992)$ 的所有自然數  $n$ =?

2 數列 $\langle a_n \rangle$ ，若 $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3}$ ，且

$$a_{n+2} - 2(n+2)a_{n+1} + (n+1)(n+2)a_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{n+3} \quad \text{求數列之一般項 } a_n = ?$$

3 空間中兩平面  $E_1: ax + by + cz = d_1, E_2: ax + by + cz = d_2$ ，若

$A(x_1, y_1, z_1) \in E_1, B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3) \in E_2$ ， $P$  為線段  $\overline{AB}$  上之

點， $\overline{CP} \cap E_1 = D$ ，求  $P$  使得  $\Delta PAB$  與  $\Delta PBC$  之面積和為最小？

4 設正  $\Delta ABC$  的內切圓和三邊的切點分別為  $D, E, F$ ，若圓弧  $EF$  上一點  $M$

到三邊  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$  之距離分別為  $p, q, r$ ，求證： $p^{\frac{1}{2}} + r^{\frac{1}{2}} = q^{\frac{1}{2}}$

5 設  $f(0) = -3$ ，且  $\forall n \in N, f(2n^3 - 1) = 2f(n)^3 - 1$ ，求  $f(x) = ?$