

國立臺中一中 合作盃數學金頭腦

第二十一一次有獎徵答

收稿時間：91 年 10 月 23 日至 91 年 10 月 25 日

繳件時請寫明時間及班級、座號

- 1 以圓規作圖(不得用直尺)， 給定：一圓圓周；求作：該圓圓心，並證明之。
- 2  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  之一函數，滿足(1)  $f(1)=2$  (2)  $f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1, \forall x, y \in \mathbb{Q}$ ，求  $f(x)=?$
- 3 若連續 10 個正整數的乘積，其結果滿足：(1)乘積最小 (2)最右邊往左算起第一個非零數字為奇數；求此 10 個正整數中最小為何？
- 4 (1) $a, b, c$  為三正實數且滿足  $(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4)$ ，證明： $a, b, c$  可為一三角形之三邊長。  
(2)設  $n$  個正實數  $a_1, a_2, \dots, a_n$  滿足  
 $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4), (n \geq 3)$ ，證明  $n$  個正實數中任三個可為三角形之三邊長。
- 5 圓  $O$  內切於  $\triangle ABC$ ,  $A_1, B_1, C_1$  分別為  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  邊上的切點， $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}$ ，分別交圓  $O$  於  $A_2, B_2, C_2$ ，求證： $\overline{A_1A_2}, \overline{B_1B_2}, \overline{C_1C_2}$  交於一點。

