數學有獎徵答(第二次)86.12.29~87.01.05

1. 設 a , b 為實數且方程式 $x^3-ax+b=0$ 有三個實根,

   若 α 為其一根,試證明： $-\sqrt{\frac{4a}{3}}\le\alpha\le\sqrt{\frac{4a}{3}}$ 。

[證明] 設 α , β , γ 為方程式 $x^3-ax+b=0$ 之實根,則 $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-a\\ \alpha\beta\gamma=-b\end{cases}$

且 $a=-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)>0$

$\therefore\ \beta+\gamma=-\alpha$, $\beta\gamma=-a-\alpha(\beta+\gamma)=-a+\alpha^2$

$\therefore\ \beta,\gamma$ 為方程式 $y^2+\alpha y+(-a+\alpha^2)=0$ 的二實根.

$\therefore\ D=\alpha^2-4(-a+\alpha^2)\ge0\ \Rightarrow\ \alpha^2\le\frac{4a}{3}\ \Rightarrow\ -\sqrt{\frac{4a}{3}}\le\alpha\le\sqrt{\frac{4a}{3}}$

[證法二]已知 α 為方程式 $x^3-ax+b=0$ 的一根,則 $x-\alpha\ \big|\ x^3-ax+b$

$\therefore x^3-ax+b=(x-\alpha)(x^2+\alpha x-a+\alpha^2)$ 且 $\alpha^3-a\alpha+b=0$

$\therefore x^2+\alpha x+(-a+\alpha^2)=0$ 有二實根 $\Rightarrow\ D=\alpha^2-4(-a+\alpha^2)\ge0\ \Rightarrow\ \alpha^2\le\frac{4a}{3}$

$\Rightarrow\ a>0$ 且 $-\sqrt{\frac{4a}{3}}\le\alpha\le\sqrt{\frac{4a}{3}}$.

2. 設 n 為正整數,

   試證明：比 $(\sqrt{3}+1)^{2n}$ 大的最小正整數必為 2^{n+1} 之倍數。

[證明] $(\sqrt{3}+1)^{2n}=(4+2\sqrt{3})^n=2^n(2+\sqrt{3})^n=2^n(a_n+b_n\sqrt{3})$,其中 a_n , b_n 皆為正整數.

$a_n=2^n+C_2^n2^{n-2}\cdot3+C_4^n2^{n-4}\cdot3^2+......$, $b_n=C_1^n2^{n-1}+C_3^n2^{n-3}\cdot3+C_5^n2^{n-5}\cdot3^2+......$

$\because 0<(\sqrt{3}-1)<1\Rightarrow0<(\sqrt{3}-1)^n<1$ 且 $(\sqrt{3}-1)^{2n}=2^n(2-\sqrt{3})^n=2^n(a_n-b_n\sqrt{3})$

$\therefore(\sqrt{3}+1)^{2n}+(\sqrt{3}-1)^{2n}=2^n(a_n+b_n\sqrt{3})+2^n(a_n-b_n\sqrt{3})=2^{n+1}\cdot a_n$ 為正整數

且為 2^{n+1} 的倍數.故得證。

3.已知半徑為$\sqrt{\frac{5}{2}}$的圓內接$\triangle ABC$的面積為1，

且$2\sin(A+B)\sin C=1$，求$\triangle ABC$的三邊長。

[解]　設$\triangle ABC$三邊長為$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$

由$2\sin(A+B)\sin C=1 \Rightarrow \sin^2 C=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin C=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle C=45°$或$135°$

又$\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C=1 \Rightarrow ab=2\sqrt{2}$ …..(a)

$\frac{c}{\sin C}=2R$ (R表外接圓半徑) $\Rightarrow \sqrt{2}\,c=2\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow c=\sqrt{5}$

(1) $\angle C=45°$ 由 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \Rightarrow 5=a^2+b^2-4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a^2+b^2=9$ (b)

由(a) (b)知a^2，b^2為$x^2-9x+8=0$的二根，$\therefore a^2=1, b^2=8$ 或 $a^2=8, b^2=1$

故 $(a, b, c)=(1, 2\sqrt{2}, \sqrt{5})$或$(2\sqrt{2}, 1, \sqrt{5})$

(2) $\angle C=135° \Rightarrow 5=a^2+b^2+4 \Rightarrow a^2+b^2=1$ (c)

由(a) (c)知以a^2，b^2為根之二次方程式為$x^2-x+8=0$ 不合.

4.$\triangle ABC$ 中 I 為內心，內切圓半徑為 r，

$\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$, $\overline{AI}=x$, $\overline{BI}=y$, $\overline{CI}=z$ ，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ ，

試證明：$abcr=xyzs$ 。

[證明] I 為內心，$\therefore \angle BIC=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$

同理 $\angle AIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle B$, $\angle AIB=90^\circ+\frac{1}{2}\angle C$

令 $\overline{AE}=\overline{AF}=\ell$, $\overline{BF}=\overline{BD}=m$, $\overline{CE}=\overline{CD}=n$

則 $\ell+m=c$, $m+n=a$, $n+\ell=b \Rightarrow \ell+m+n=\frac{1}{2}(a+b+c)=S$

$\therefore \ell=S-a$, $m=S-b$, $n=S-c$

$\triangle ABI$ 中，$\dfrac{\overline{AI}}{\sin\frac{B}{2}}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle AIB} \Rightarrow \dfrac{x}{\sin\frac{B}{2}}=\dfrac{c}{\sin(90^\circ+\frac{C}{2})} \Rightarrow \dfrac{x}{c}=\dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$ ….(1)

同理 $\dfrac{y}{a}=\dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ ….(2)　$\dfrac{z}{b}=\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$ ….(3)

(1)×(2)×(3) , $\dfrac{xyz}{abc}=\dfrac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\dfrac{r}{S-a}\cdot\dfrac{r}{S-b}\cdot\dfrac{r}{S-c}$

$=\dfrac{S\,r^3}{S(S-a)(S-b)(S-c)}=\dfrac{S\,r^3}{\Delta^2}=\dfrac{S\,r^3}{r^2\cdot S^2}=\dfrac{r}{S}$　($\because \triangle=rS$)

故 $abcr=xyzS$.

5.已知數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=2$, $a_n=\dfrac{3a_{n-1}+1}{a_{n-1}-1}$ $(n\in N , n\ge 2)$

求a_n=______________.(以 n 表示)。

[解] $a_n=\dfrac{3a_{n-1}+1}{a_{n-1}-1}$的特徵方程式為$x=\dfrac{3x+1}{x-1}\Rightarrow x=2\pm\sqrt{5}$

$$a_n-(2+\sqrt{5})=\frac{3a_{n-1}+1}{a_{n-1}-1}-(2+\sqrt{5})=\frac{(1-\sqrt{5})[a_{n-1}-(2+\sqrt{5})]}{a_{n-1}-1}\ \ldots\ldots(1)$$

$$a_n-(2-\sqrt{5})=\frac{3a_{n-1}+1}{a_{n-1}-1}-(2-\sqrt{5})=\frac{(1+\sqrt{5})[a_{n-1}-(2-\sqrt{5})]}{a_{n-1}-1}\ \ldots\ldots(2)$$

$$\frac{(1)}{(2)}\quad \frac{a_n-(2+\sqrt{5})}{a_n-(2-\sqrt{5})}=\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{a_{n-1}-(2+\sqrt{5})}{a_{n-1}-(2-\sqrt{5})}$$

令$b_n=\dfrac{a_n-(2+\sqrt{5})}{a_n-(2-\sqrt{5})}$ 則$b_1=\dfrac{a_1-(2+\sqrt{5})}{a_1-(2-\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{5}}{-\sqrt{5}}=-1$

且$b_n=\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}b_{n-1}=\ldots\ldots\ldots\ldots=(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}})^{n-1}b_1=-(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}})^{n-1}$

$$\therefore \frac{a_n-(2+\sqrt{5})}{a_n-(2-\sqrt{5})}=b_n=\frac{-(1-\sqrt{5})^{n-1}}{(1+\sqrt{5})^{n-1}}\quad\Rightarrow\quad \frac{a_n-(2+\sqrt{5})}{-2\sqrt{5}}=\frac{-(1-\sqrt{5})^{n-1}}{-(1-\sqrt{5})^{n-1}-(1+\sqrt{5})^{n-1}}$$

$$\therefore a_n=(2+\sqrt{5})-\frac{2\sqrt{5}(1-\sqrt{5})^{n-1}}{(1+\sqrt{5})^{n-1}+(1-\sqrt{5})^{n-1}}=\frac{(2+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^{n-1}+(2-\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^{n-1}}{(1+\sqrt{5})^{n-1}+(1-\sqrt{5})^{n-1}}$$

$$=1+\frac{(1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n}{(1+\sqrt{5})^{n-1}+(1-\sqrt{5})^{n-1}}$$