

台灣省立台中一中 合作盃數學金頭腦

第二次有獎徵答

收稿時間:86年12月29日~87年1月5日中午

1. 設 a, b 為實數且方程式 $x^3 - ax + b = 0$ 有三個實根,

若 α 為其一根, 試證明: $-\sqrt{\frac{4a}{3}} \leq \alpha \leq \sqrt{\frac{4a}{3}}$ 。

2. 設 n 為正整數,

試證明: 比 $(\sqrt{3}+1)^{2n}$ 大的最小正整數必為 2^{n+1} 之倍數。

3. 已知半徑為 $\sqrt{\frac{5}{2}}$ 的圓內接 $\triangle ABC$ 的面積為 1,

且 $2\sin(A+B)\sin C = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的三邊長。

4. $\triangle ABC$ 中 I 為內心, 內切圓半徑為 r ,

$\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c, \overline{AI} = x, \overline{BI} = y, \overline{CI} = z, s = \frac{a+b+c}{2}$,

試證明: $abc r = xyz s$ 。

5. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 2, a_n = \frac{3a_{n-1} + 1}{a_{n-1} - 1}$ ($n \in N, n \geq 2$)

求 $a_n =$ _____。(以 n 表示)。