

第十八次有獎徵答

收稿時間：90年12月12日至90年12月14日

繳交時間務必寫正確，否則不予計分

一 a_1, a_2, \dots, a_n 為方程式 $x^n + x + 1 = 0$ 之 n 個根，求證：

$$(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1}) - (a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n) = 1$$

二 已知 $\cos 3\theta, \cos 5\theta, \cos 8\theta$ 皆為有理數，試問 $\cos \theta$ 是否為有理數？若是請證明，若不是請舉出一反例

三 設 $a, b, c \in R$ ，且 $a > 1, b > 1, c > 1$ ，求 $\frac{a^5}{b^3-1} + \frac{b^5}{c^3-1} + \frac{c^5}{a^3-1}$ 之最小值？

四 $Z_1, Z_2 \in C$ ，已知 $|Z_1| = |Z_1 + Z_2| = 3, |Z_1 - Z_2| = 3\sqrt{3}$ ，求

$$\log_3 \left| (Z_1 \overline{Z_2})^{2000} + (\overline{Z_1} Z_2)^{2000} \right| = ?$$

五 已知正 n 邊形共有 n 條對角線，它的周長等於 p ，所有對角線長之和等於 q ，

$$\text{則 } \frac{q}{p} - \frac{p}{q} = ?$$