1、$a^3b - ab^3 = ab(a+b)(a-b)$

(一)(甲) 三數至少有一個爲 5 的倍數，則 ab 爲 5 的倍數。

(乙)三數皆不爲 5 的倍數

(a) 至少有二數除已 5 餘數相同，則 $a-b$ 爲 5 的倍數。

(b) 三數除以 5 餘數皆不相同

(i) $5k+1$，$5k+2$，$5k+3$ $(5k+2)+(5k+3) = 5(2k+1)$

(ii) $5k+1$，$5k+2$，$5k+4$ $(5k+1)+(5k+4)$

(iii) $5k+1$，$5k+3$，$5k+4$ $(5k+1)+(5k+4)$

(iv) $5k+2$，$5k+3$，$5k+4$ $(5k+2)+(5k+3)$

$\therefore$ $ab(a+b)(a-b)$爲 5 之倍數

滿足(一)之二數 a、b

(二)二數

(i) 奇 奇 $a+b$ 爲偶數

(ii) 至少一個爲偶數 ab 爲偶數

$\therefore ab(a+b)(a-b)$爲偶數

(三)二數

(i) 至少一個爲 3 之倍數 ab 爲 3 之倍數

(ii) 二數皆不可爲 3 之倍數

(ㄅ)除以 3 同餘數，$a-b$ 爲 3 之倍數

(ㄆ)除以 3 不同餘數

$3k+1$，$3k+2$

$a+b = (3k+1)+(3k+2) = 3(2k+1)$

$\therefore ab(a+b)(a-b)$爲 3 之倍數

由(一)(二)(三)

$[5 , 2 , 3] = 30$

存在二數 a，$b\in N$

使得 $ab(a+b)(a-b)$爲 30 之倍數

2、$\because x$，y 均爲不大於 1 的正數

$\therefore$ 令 $x = sin\alpha$ ，$y = cos\beta > 0$

則原函數$=3\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\beta+1-\sin^2\alpha-\cos^2\beta}+sin\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta}+$

$\cos\beta\sqrt{1-\sin^2\alpha}-3\sin\alpha\cos\beta$

$=3\sqrt{(1-\sin^2\alpha)(1-\cos^2\beta}+\sin\alpha\sin\beta+\cos\beta\cos\alpha-3\sin\alpha\cos\beta$

$=3\cos\alpha\sin\beta-3\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=3\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

$= \sqrt{10}[\frac{3}{\sqrt{10}}\sin(\alpha-\beta)+\frac{1}{\sqrt{10}}\cos(\alpha-\beta)]$

$= \sqrt{10}\sin[(\alpha-\beta)+\theta]$，其中$\theta=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\leqq \sqrt{10}$

$\therefore$ 最大值爲$\sqrt{10}$

3、用$a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$

$a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$

又令$f(x)=x^2+x+1$ $g(x)=x^2-x+1$

$\therefore f(x-1)=(x-1)^2+(x-1)+1 = x^2-x+1 = g(x)$

$\therefore f(99) = 99^2+99+1 = g(100)=100^2-100+1$

$\therefore$ $f(98) = 98^2+98+1 = g(99)=99^2-99+1$

: :

: :

$f(2) = 2^2+2+1 = g(3)=3^2-3+1$

所求 =

$$\frac{(2-1)(2^2+2+1)(3-1)(3^2+3+1)......(99-1)(99^2+99+1)(100-1)(100^2+100+1)}{(2+1)(2^2-2+1)(3+1)(3^2-3+1)......(99+1)(99^2-99+1)(100+1)(100^2-100+1)}$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdots 98\cdot 99\cdot(2^2+2+1)(3^2+3+1)......(99^2+99+1)(100^2+100+1)}{3\cdot 4\cdot 5\cdots 98\cdot 99\cdot 100\cdot 101\cdot(2^2-2+1)(3^2-3+1)......(99^2-99+1)(100^2-100+1)}$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot(100^2+100+1)}{100\cdot 101\cdot(2^2-2-1)} = \frac{10101\cdot 2}{100\cdot 101\cdot 3} = \frac{3367}{5050}$$

4、 $a=x+y$，$b=y+z$，$c=z+x$

$\because a+b>c$，$b+c>a$，$c+a>b$

$\Rightarrow a,b,c$可爲三角形之三邊長

$S=\frac{a+b+c}{2}=x+y+z$

$\Delta=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}=\sqrt{xyz(x+y+z)}=1$

$=\frac{1}{2}ac\sin\theta$ (θ爲兩邊夾角)

$$=\frac{1}{2}(x+y)(x+z)\sin\theta$$

$$\Rightarrow (x+y)(x+z)=\frac{2}{\sin\theta}\geq 2$$

固最小值=2

5、過 O、A 各做 $\overline{OH}\perp\overline{BC},\overline{AK}\perp\overline{BC}$

$$\therefore \frac{\Delta OBC}{\Delta ABC}=\frac{OH}{AK}=\frac{OP}{AP}$$

同理 $\frac{OQ}{BQ}=\frac{\Delta OCA}{\Delta ABC}$

$$\frac{OR}{CR}=\frac{\Delta OAB}{\Delta ABC}$$

$$\therefore \frac{OP}{AP}+\frac{OQ}{BQ}+\frac{OR}{CR}=\frac{\Delta OBC+\Delta OCA+\Delta OAB}{\Delta ABC}=\frac{\Delta ABC}{\Delta ABC}=1$$

令 $\frac{OP}{AP}=x,\frac{OQ}{BQ}=y,\frac{OQ}{CR}=z$

$$\therefore x+y+z=1$$

由柯西不等式知

$$(x+y+x)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\geq(1+1+1)^2=9$$

$$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 9$$

即 $\frac{AP}{OP}+\frac{BQ}{OQ}+\frac{CR}{OR}\geq 9$