

# 國立台中一中合作盃數學金頭腦

第十七次有獎徵答

收稿時間：90 年 10 月 30 日 至 90 年 11 月 1 日

繳交時間務必寫正確 否則不予記分

一· 求證任意三相異整數中一定有二數  $a, b$  使得  $a^3b - ab^3$  為 30 的倍數

二· 設  $x, y$  均為不大於 1 的正數

求  $3\sqrt{x^2y^2 + 1 - x^2 - y^2} + x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} - 3xy$  之最大值。

三· 計算  $\frac{(2^3 - 1)(3^3 - 1)(4^3 - 1) \cdots (99^3 - 1)(100^3 - 1)}{(2^3 + 1)(3^3 + 1)(4^3 + 1) \cdots (99^3 + 1)(100^3 + 1)} = ?$

四·  $x, y, z$  均為正數,  $xyz(x+y+z)=1$ , 求  $(x+y)(x+z)$  之最小值=?

五· 設  $O$  為  $\triangle ABC$  內部一點,  $AO, BO, CO$  延長交對邊  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  於  $P, Q, R$

證明： $\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} + \frac{\overline{BQ}}{\overline{OQ}} + \frac{\overline{CR}}{\overline{OR}} \geq 9$