國立臺中一中 合作盃數學金頭腦

第十五次有獎徵答

收稿時間: 90 年 4 月 11 日～90 年 4 月 15 日

繳交時間務必寫正確,否則不予計

1. 設 $f(n)$ 為定義在所有正整數上的一個函數. 若對任意正整數 m , n 恆有 $f(f(m)+f(n))=m+n$ 求 $f(2001)$ 的所有可能的值。

2. 設△ABC 的三邊長 $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=5$, $\overline{AB}=7$, P 為△ABC 內部一點且 D,E,F 分別為 P 到 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 各邊所作垂線的垂足, 求使 $\dfrac{4}{\overline{PD}}+\dfrac{5}{\overline{PE}}+\dfrac{7}{\overline{PF}}$ 之值為最小的 P 點並求其最小值。

3. 已知 $y\ge x^2, y^2\le 8x, xy\ge 1, u=-3\log_2 x+\log_2 y. t=8\log_2 x-\log_2 y+21$ 求 $2u-t$ 之極大值與極小值及其對應之 x , y , u , t 值。

4. $f(x,y,z)=|x-1|+|y-1|+|z-1|-3$，求 $f(|x|,|y|,|z|)\le 0$ 之圖形的體積。

5. (1) $n\in N$ 求一有理係數 n 次方程式使其根為

$$\cot^2\frac{\pi}{2n+1}, \cot^2\frac{2\pi}{2n+1}, \cot^2\frac{3\pi}{2n+1},..., \cot^2\frac{n\pi}{2n+1}$$

(2) 證明：$\cot^2\dfrac{\pi}{2n+1}+\cot^2\dfrac{2\pi}{2n+1}+.....+\cot^2\dfrac{n\pi}{2n+1}=\dfrac{n(2n-1)}{3}$