

國立臺中一中 合作盃數學金頭腦

第十四次有獎徵答

收稿時間：89年12月13日~89年12月15日

繳交時間務必寫正確，否則不予計分

- 一. 在平面上,自點 $A(-3,3)$ 發出的光線 L 射到 X 軸上,被 X 軸反射,其反射光線可與圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ 相交,求光線 L 可轉動角度的最大值.
- 二. 一圓的直徑為 \overline{AB} ,其長度為 10,二弦 $\overline{CD}, \overline{EF}$ 分別交 \overline{AB} 於 Q, P 且 $\overline{CD}, \overline{EF}$ 與直徑 \overline{AB} 的銳夾角均為 45 度, 試證 $\overline{PE} \times \overline{PF} + \overline{QC} \times \overline{QD} \leq 50$.
- 三. $\triangle ABC$ 為銳角三角形. 若 P 為 $\triangle ABC$ 內一點且 P 到三邊 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的垂足分別為 L, M, N , 求使 $\overline{BL}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{AN}^2$ 為最小的點 P , 並求此最小值.
- 四. (1) 求不定方程式 $57X - 86Y + Z = 30$ 的一般整數解.
(2) 有一正數 A , 以四進位表示, 其整數部分為二位, 小數部分為二位循環小數, 即 $A = (xy.\overline{zt})_4$. 若 $A-2$ 的六進位表示為二位整數與一位循環小數且 $A-2 = (zy.\overline{x})_6$, 試求 x, y, z 之值.
- 五. P 為 $\triangle ABC$ 中線 \overline{AD} 上的動點, 過 P 的任一直線 L 把 $\triangle ABC$ 分成兩部分, 面積較大部分與面積較小部分, 其面積差的極大值以 $f(P)$ 表示.
(1) 設 G 為 $\triangle ABC$ 的重心, $f(G) = x\Delta$, ($x \in R^+$, Δ 表 $\triangle ABC$ 的面積), 求 x .
(2) 設 $\frac{1}{9}\Delta \leq f(P) \leq \frac{23}{49}\Delta$, 此時 P 的軌跡的長度為 $y\overline{AD}$, ($y \in R^+$), 求 y .

☆注意事項：請獨立作答，相同解法將擇優錄取發給獎狀。