

國立台中一中 合作盃數學金頭腦

第十二次有獎徵答

收稿時間:89年5月30日~89年6月1日16時

※繳交時間務必寫正確否則不予計分

1. 設 $a, b, c, d, e \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 且均相異，又 $7 \mid a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3$ ，問序組 (a, b, c, d, e) 有多少組。
2. 設 a, b, c 為銳角 $\triangle ABC$ 的三邊長， h_a, h_b, h_c 為對應邊上的三高，試證明： $\frac{1}{2} < \frac{h_a + h_b + h_c}{a + b + c} < 1$ 。
3. 設 $\triangle ABC$ 的三內角 A, B, C 成等差數列，而其所對應的三邊長 a, b, c 成調和數列，試判別 $\triangle ABC$ 的形狀，並證明之。
4. $\triangle ABC$ 的三邊 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 上各有 n 個點，將其與對角 A, B, C 連成 $3n$ 條線段，若任三線段皆不共點，問此 $3n$ 條線段將 $\triangle ABC$ 內部分割成多少個區域。
5. 若 $a_i, b_i, c_i \in R^+, i = 1, 2, 3, \dots, n$ ，(R^+ 表示正實數)

$$\text{且 } \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n c_i, \text{ 試證明 } \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i + b_i + c_i} \geq \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n a_i \text{。}$$