數學有獎徵答(第一次)86.10.13~10.24

1. 設 a 是正整數, $a<100$,若 a^3+23 能被 24 整除,求 a 之值.

   [解] $a^3+23=a^3-1+24$ 可被 24 整除,則必 a^3-1 可被 24 整除,

   又 $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)=(a-1)[a(a+1)+1]$

   若 $3\nmid a-1$,則因 $3\mid(a-1)a(a+1)$,故必 $3\mid a(a+1)$

   因而 $3\nmid a(a+1)+1$, $\therefore 3\mid a-1$

   於是 $24\mid a-1$,令 $a=24k+1$ ($k\in Z$),則 $1\leqq 24k+1<100$

   k 取值為 0 , 1 , 2 , 3 , 4 ,故得 a 的值為 1 , 25 , 49 , 73 , 97

2. 已知 a , b , c 為三角形之邊長, T 表此三角形的面積,求證: $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}T$

   [證一]設 $S=\frac{1}{2}(a+b+c)$,則由海龍公式,三角形面積 $T=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

   $\Rightarrow T^2=S(S-a)(S-b)(S-c)$

   $\because \frac{1}{3}[\,(S-a)+(S-b)+(S-c)\,]\geq\sqrt[3]{(S-a)(S-b)(S-c)}$

   $\therefore (\frac{S}{3})^3\geq(S-a)(S-b)(S-c)\Rightarrow\frac{S^3}{27}\geq S(S-a)(S-b)(S-c)=T^2\Rightarrow S^2\geq 3\sqrt{3}T$

   又 $(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2=4S^2$

   $\therefore a^2+b^2+c^2\geq\frac{4}{3}S^2\geq\frac{4}{3}\cdot 3\sqrt{3}T=4\sqrt{3}T$

   [證二]已知 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$, $T=\frac{1}{2}ab\sin C$

   $\therefore a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}T=2a^2+2b^2-2ab\cos C-2\sqrt{3}\,ab\sin C$

   $=2a^2+2b^2-2ab(\cos C+\sqrt{3}\sin C)=2a^2+2b^2-4ab(\sin 30^\circ\cos C+\cos 30^\circ\sin C)$

   $=2a^2+2b^2-4ab\sin(30^\circ+C)\geq 2a^2+2b^2-4ab=2(a-b)^2\geq 0$

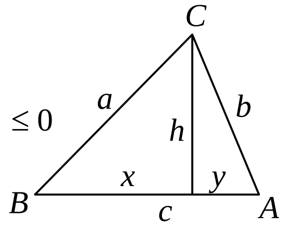
   $\therefore a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}T$

   [證三]如右圖 $\triangle ABC$ 中 $a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}T=h^2+x^2+h^2+y^2+(x+y)^2-2\sqrt{3}(x+y)h$

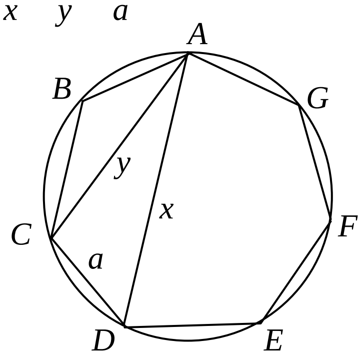
   $=2h^2-2\sqrt{3}(x+y)h+2(x^2+y^2+xy)=f(h)$

   $\because$ 判別式 $=3(x+y)^2-4(x^2+y^2+xy)=-x^2-y^2+2xy=-(x-y)^2\leq 0$

   $\therefore f(h)\geq 0$ 即 $a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}T\geq 0$ 即 $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}T$



3. 設邊長 a 的正七邊形的對角線中,最長為 x,最短為 y,試證：$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$



[證] $\triangle ACD$ 中,設 $\angle CAD=\theta$ 則 $\angle ADC=2\theta$,$\angle ACD=4\theta$

且 $\overline{AD}=x$, $\overline{AC}=y$, $\because \theta+2\theta+4\theta=\pi$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{7}$

又設 $\triangle ACD$ 外接圓半徑為 R ,

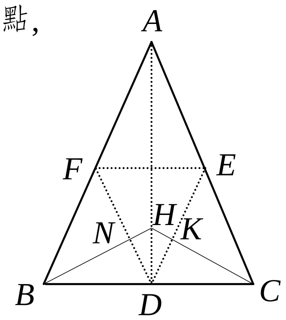
由正弦定理 $\frac{a}{\sin\theta}=\frac{y}{\sin 2\theta}=\frac{x}{\sin 4\theta}=2R$

$\therefore a=2R\sin\theta$, $y=2R\sin 2\theta$, $x=2R\sin 4\theta$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin 2\theta}+\frac{1}{\sin 4\theta}\right)=\frac{\sin 2\theta+\sin 4\theta}{2R\sin 2\theta\sin 4\theta}=\frac{2\sin 3\theta\cos\theta}{2R\sin 2\theta\sin 4\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta}{2R\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{a} \qquad \left(\sin 3\theta=\sin\frac{3\pi}{7}=\sin\frac{4\pi}{7}=\sin 4\theta\right)$$

4. $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB}=\overline{AC}=20$, $\overline{BC}=10$,又 D , E , F 分別 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 的中點,

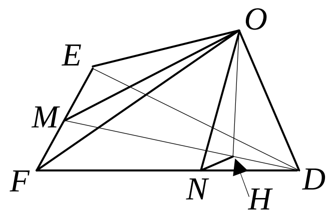


今沿 $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FD}$ 折疊成一四面體,求此四面體的體積.

[解一]設所折成四面體為 O-DEF (A,B,C 重合為一點 O)

作 $\overline{OH}$ 垂直平面 DEF ,垂足 H 在 $\overline{AD}$ 上,再作 $\overline{HN}\perp\overline{DF}$,

則 $\overline{ON}\perp\overline{DF}$ 即 $\overline{BN}\perp\overline{DF}\Rightarrow\overline{BH}\perp\overline{DF}$,同理 $\overline{CH}\perp\overline{DE}$



$\overline{AD}=\sqrt{20^2-5^2}=5\sqrt{15}$, $\triangle DEF=\frac{1}{4}\triangle ABC=\frac{1}{4}\times 25\sqrt{15}$

設 $\angle DAF=\theta$ 則 $\angle ADF=\angle DBN=\theta$

$$\tan\theta=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{5}{5\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{15}}\Rightarrow\overline{DH}=\overline{BD}\tan\theta=\frac{5}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

$\therefore O$-DEF 的高為 $\overline{OH}=\sqrt{\overline{OD}^2-\overline{DH}^2}=\frac{\sqrt{210}}{3}$, 體積 $V=\frac{1}{3}\triangle DEF\cdot\overline{OH}=\frac{125}{12}\sqrt{14}$

[解二]

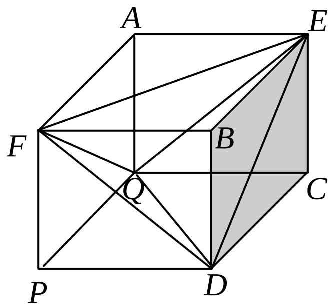
如右圖的長方體,令 $\overline{AE}=a$, $\overline{AF}=b$, $\overline{AQ}=c$

四面體 *Q-DEF* 的體積

= 長方體 *AFBE-QPDC* 的體積

-4(四面體 *Q-DPF* 的體積)

$=abc-4\left(\dfrac{abc}{6}\right)=\dfrac{1}{3}abc$



又 $\begin{cases} a^2+b^2=5^2=25 & (1) \\ b^2+c^2=10^2=100 & (2) \\ c^2+a^2=10^2=100 & (3) \end{cases}$

$\Rightarrow a=b=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$, $c=\dfrac{5}{2}\sqrt{14}$

$\therefore$四面體 *A-CFH* 的體積$=\dfrac{1}{3}abc=\dfrac{125}{12}\sqrt{14}$

5. 小明準備參加 11 個星期之後的數學競試,他每天至少解一個題目,但一個星期不超過 12 題. 試證明在這準備期間,存在某段連續的日子裡,他正好解了 20 題.

[證] 設 a_n 為到第 n 天為止已解的題數, $n=1, 2, 3, \ldots\ldots, 77$.

由於小明每天至少解一題,所以集合 $A=\{a_1,a_2,\ldots\ldots,a_{77}\}$包含了 77 個不同的數字.

令 $b_n=a_n+20$, $B=\{b_1,b_2,\ldots\ldots,b_{77}\}$, B 的元素也是互異的.

我們先證明 A 與 B 有共同的元素.即對某個 m 與 n, $a_m=b_n$ 從而知道從第 $n+1$ 天到第 m 天小明恰好解了 20 題.

因一星解的題數不超過 12 題,故 A 或 B 中沒有一個元素能超過$11\times12+20=152$

但 A 與 B 共含有 $77\times2=154$,這些元素的值只能取 1 , 2 , 3 , ….. , 152 ,所以至少有一個重覆出現,即 A 中某元素等於 B 中某元素, 即得證.