

# 台灣省立台中一中 合作盃數學金頭腦

## 第十次有獎徵答

收稿時間:88年10月27日~88年10月29日16時

1. 若  $P$  是半徑為  $r$  的圓  $O$  內部一點, 過  $P$  作任一弦  $\overline{AB}$ ,  $\angle AOP = \alpha$ ,  $\angle BOP = \beta$ ,

$$\overline{OP} = a, \text{ 試證明: } \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} = \frac{r-a}{r+a}.$$

2. 設實數函數  $f(x)$  滿足函數方程式  $f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1+x$  ( $x \neq 0, 1$ ), 求

$$f(x).$$

3. 有一四面體  $PABC$ , 已知  $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 90^\circ$ , 稜長之和為 18, 求此四面體之最大體積。

4. 在  $\triangle ABC$  的外側, 分別以  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  為一邊作正  $m, n, p$  邊形, 如果這三個

$$\text{正多邊形的外接圓相交於 } \triangle ABC \text{ 內部一點 } O, \text{ 試證明: } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$$

5. 假設三角形的邊長都是正整數, 此三角形的面積等於其周長, 且周長為偶數, 試求此三角形之三邊長。