105 年大學入學指定科目考試
數學乙試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（佔 76 分）

一、單選題（佔 18 分）

1. 下列哪一個選項是方程式$7x^5-2x^4+14x^3-4x^2+7x-2=0$的根？

 (1) -1 (2) $\frac{1}{7}$ (3) $-\frac{1}{7}$ (4) $\frac{2}{7}$ (5) $-\frac{2}{7}$ 【105 數乙】

$\boxed{答}$：(4) （第一冊第二章多項函數—方程式）

$\boxed{解}$：原式$=x^4(7x-2)+2x^2(7x-2)+(7x-2)$

$$=(7x-2)\left[x^4+2x^2+1\right]=(7x-2)\left[x^2+1\right]^2=0$$

五根為：$\frac{2}{7}$、$\pm i$（重根）

2. 考慮有理數$\frac{n}{m}$，其中m、n為正整數且$1\le mn\le 8$。

 則這樣的數值（例如$\frac{1}{2}$與$\frac{2}{4}$同值，只算一個）共有幾個？

 (1) 14 個 (2) 15 個 (3) 16 個 (4) 17 個 (5) 18 個 【105 數乙】

$\boxed{答}$：(4) （第一冊第一章數與式—有理數）

$\boxed{解}$：

m	1	1	2	1	3	1	2	4	1	5	1	2	3	6	1	7	1	2	4	8
n	1	2	1	3	1	4	2	1	5	1	6	3	2	1	7	1	8	4	2	1
值	1	2	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$	4	(1)	$\frac{1}{4}$	5	$\frac{1}{5}$	6	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	7	$\frac{1}{7}$	8	(2)	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{8}$

3. 座標平面上有兩向量$\vec{u}=(5,10)$，$\vec{v}=(-4,2)$。請問下列哪一個向量的長度最大？

 (1) $-3\vec{u}$ (2) $6\vec{v}$ (3) $-2\vec{u}-5\vec{v}$ (4) $2\vec{u}-5\vec{v}$ (5) $\vec{u}+7\vec{v}$ 【105 數乙】

$\boxed{答}$：(1) （第三冊第三章平面向量—內積、正定性）

$\boxed{解}$：$\left|\vec{u}\right|^2=125$、$\left|\vec{v}\right|^2=20$、$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

(1) $\left|-3\vec{u}\right|^2=1125$ (2) $\left|6\vec{v}\right|^2=720$ (3) $\left|-2\vec{u}-5\vec{v}\right|^2=1000$

(4) $\left|2\vec{u}-5\vec{v}\right|^2=1000$ (5) $\left|\vec{u}+7\vec{v}\right|^2=1105$

二、多選題（佔 40 分）

4. 設$f(x)$為一未知的實係數多項式，

 但知道$f(x)$除以$(x-5)(x-6)^2$的餘式為$5x^2+6x+7$。

 根據上述所給條件，請選出正確的選項。

(1) 可求出 $f(0)$ 之值　(2) 可求出 $f(11)$ 之值

(3) 可求出 $f(x)$ 除以 $(x-5)^2$ 的餘式　(4) 可求出 $f(x)$ 除以 $(x-6)^2$ 的餘式

(5) 可求出 $f(x)$ 除以 $(x-5)(x-6)$ 的餘式　【105 數乙】

答：(4)(5)（第一冊第二章多項函數—餘式定理）

解：(4) $f(x)=(x-5)(x-6)^2Q(x)+5x^2+6x+7$

$=(x-5)(x-6)^2Q(x)+5(x-6)^2+66x-173$

(5) $f(x)=(x-5)(x-6)^2Q(x)+5x^2+6x+7$

$=(x-5)(x-6)^2Q(x)+5(x-5)(x-6)+61x-143$

5. 甲先生、乙先生、丙先生、丁先生四位男生以及 A 小姐、B 小姐、C 小姐、D 小姐四位女士想要混搭兩部計程車，每車載有四名乘客。已知：

（一）甲先生與 A 小姐同車

（二）乙先生與 B 小姐同車

（三）C 小姐與 D 小姐不同車

請選出正確的選項。

(1) A 小姐與 D 小姐必不同車

(2) 甲先生與 B 小姐必不同車

(3) 乙先生與丙先生必同車

(4) 如果乙先生與丁先生同車，則丙先生與 B 小姐必同車

(5) 如果 D 小姐與乙先生同車，則 C 小姐與 A 小姐必同車　【105 數乙】

答：(2)(5)（第二冊第二章排列組合—分類）

解：

甲乙 AB	甲丙 AC	甲丙 AD	甲丁 AC	甲丁 AD
丙丁 CD	乙丁 BD	乙丁 BC	乙丙 BD	乙丙 BC
不合				

6. 設 $a=10^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$，$b=a^{\sqrt{2}}$。請選出正確的選項。

(1) $1<a$　(2) $a<\sqrt{3}$　(3) $a^2<b^{\sqrt{3}}$　(4) $10^{0.4}<b<10^{0.5}$　(5) $(ab)^{\sqrt{2}}<10$

【105 數乙】

答：(1)(3)(4)（第一冊第三章指數對數—取對數）

解：(1) $\log a=\log 10^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.29\cdots>\log 1=0\quad\Rightarrow a>1$

(2) $\log a=\log 10^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.29\cdots>\log\sqrt{3}\approx 0.23\cdots\quad\Rightarrow a>\sqrt{3}$

(3) $\log a^2=2\log a<\log a^{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\log a\quad\Rightarrow a^2<a^{\sqrt{6}}=b^{\sqrt{3}}$

(4) $\log 10^{0.4}=0.4<\log a^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\log a=\sqrt{2}-1\approx 0.414<\log 10^{0.5}=0.5$

$\Rightarrow 10^{0.4}<b<10^{0.5}$

(5) $\log(ab)^{\sqrt{2}}=\log\left(a^{1+\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=\left(2+\sqrt{2}\right)\log a=1=\log 10\quad\Rightarrow(ab)^{\sqrt{2}}=10$

7. 座標平面上O為原點，P點座標為$(1,0)$，直線L的方程式為$x-2y=-4$。
請選出正確的選項。
(1) 在直線L上可以找到一點A，滿足向量$\overline{OP}$與$\overline{OA}$平行
(2) 在直線L上可以找到一點B，滿足向量$\overline{OP}$與$\overline{OB}$垂直
(3) 在直線L上可以找到一點C，滿足向量$\overline{OC}$與$\overline{PC}$垂直
(4) 在直線L上可以找到一點D，滿足$\overline{PD}=2$
(5) 在直線L上可以找到一點E，滿足ΔEOP為等腰三角形 【105 數乙】

答：(1)(2)(5) （第三冊第三章平面向量—直線參數式、內積）
解：$x-2y=-4$上動點$(2t-4,t)$

(1) $(1,0)=c(2t-4,t)\Rightarrow t=0,c=-\frac{1}{4}$，滿足向量$\overline{OP}$與$\overline{OA}$平行

(2) $(1,0)\cdot(2t-4,t)=0\Rightarrow t=2$，滿足向量$\overline{OP}$與$\overline{OB}$垂直

(3) $(2t-4,t)\cdot(2t-5,t)=0\Rightarrow 5t^2-18t+20=0\xrightarrow{\text{判別式}<0}$無解

(4) $\sqrt{(2t-5)^2+t^2}=2\Rightarrow 5t^2-20t+21=0\xrightarrow{\text{判別式}<0}$無解

(5)當$2t-4=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{9}{4}$，滿足$\Delta EOP$為$\overline{EO}=\overline{EP}$等腰三角形

8. 某社區有一千位居民，其個人月所得少於 10,000 元者占30%，
介於 10,000 元及 20,000 元間者占10%，介於 20,000 元及 40,000 元間者占30%，
介於 40,000 元及 80,000 元間者占30%。請選出正確的選項。
(1) 該社區個人月所得的中位數介於 20,000 元及 40,000 元間
(2) 使用簡單隨機抽樣自該社區中抽出一位居民，其個人月所得在上述的四個區間中，以介於 10,000 元及 20,000 元間的機率最低
(3) 該社區的個人月所得平均，不可能高過 40,000 元
(4) 該社區的個人月所得平均，不可能低過該社區的個人月所得中位數
(5) 若該社區新搬入一位居民，其月所得為 200,000 元，則該社區的個人月所得平均將增加，但增加量不會多過 200 元 【105 數乙】

答：(1)(2)(5) （第二冊第四章統計—平均數、中位數）
解：(3)最高月所得平均$10000\times30\%+20000\times10\%+40000\times30\%+80000\times30\%=41000$

(4)最低月所得平均$0\times30\%+10000\times10\%+20000\times30\%+40000\times30\%=19000$

(5) $\frac{\overline{X}\times1000+200000}{1001}-\overline{X}=\frac{200000-\overline{X}}{1001}<200$

三、選填題（佔 18 分）

A. 不透明袋中有三顆白球及三顆紅球。
從袋中每次取出一球依序置於桌面，每次每顆球被取出的機率相同。
全部取出後，前三顆球中有相鄰兩球同為白球的機率為________。（請化為最簡分數）
【105 數乙】

答：$\frac{7}{20}$（第一冊第三章機率—獨立事件）

解：$\underbrace{\frac{3}{6}}_{白}\times\underbrace{\frac{2}{5}}_{白}\times\underbrace{\frac{1}{4}}_{白}+\underbrace{\frac{3}{6}}_{白}\times\underbrace{\frac{2}{5}}_{白}\times\underbrace{\frac{3}{4}}_{紅}+\underbrace{\frac{3}{6}}_{紅}\times\underbrace{\frac{3}{5}}_{白}\times\underbrace{\frac{2}{4}}_{白}=\frac{7}{20}$

B. 設 x 、 c 為實數，方陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & x\end{bmatrix}$ 、 $B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & x\end{bmatrix}$ 。

已知 A 的反方陣恰好是 B 的 c 倍（其中 $c\neq 0$ ），

則數對 $(x,c)=$＿＿＿＿＿。（請化為最簡分數）【105 數乙】

答：$(x,c)=\left(3,\frac{1}{13}\right)$（第四冊第三章矩陣—反矩陣、係數積）

解：$A^{-1}=\begin{bmatrix}x & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\times\frac{1}{3x+4}=c\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & x\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=c(3x+4)\times 3\\ 2=c(3c+4)\times 2\end{cases}\Rightarrow x=3,c=\frac{1}{13}$

C. 設 $\langle a_n\rangle$ 為一等差數列。已知 $a_2+a_4+a_6=186$ ， $a_3+a_7=110$ 。

令 $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 。則極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{n^2}=$＿＿＿＿＿。（請化為最簡分數）

【105 數乙】

答：$\frac{-7}{2}$（第六冊第一章極限—數列極限）

解：$\begin{cases}a_2+a_4+a_6=3a_1+9d=186\\ a_3+a_7=2a_1+8d=110\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=83\\ d=-7\end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{[166+(n-1)(-7)]\times\frac{n}{2}}{n^2}=\frac{-7}{2}$$

第貳部分：非選擇題（佔 24 分）

1. 設隨機變數 X 表示投擲一不公正骰子出現的點數，

$P(X=k)$ 表示隨機變數 X 取值為 k 的機率。

已知 X 的機率分布如下表：（ x,y 為未知常數）

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	x	y	y	x	y	y

又知 X 的期望值等於 3。

(1) 試求 x 、 y 之值。

(2) 投擲此骰子兩次，試求點數和為 3 的機率。【105 數乙】

答：(1) $x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{12}$　　(2) $\frac{1}{18}$（第五冊第一章機率與統計—期望值）

解：(1)$\begin{cases}機率總和=2x+4y=1\\ 期望值=5x+16y=3\end{cases}\Rightarrow x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{12}$　　(2)$(xy)\times 2=\frac{1}{18}$

2. 某農業公司計畫向政府承租一筆平地和一筆山坡地，
分別種植平地作物 A 和山坡地作物 B 。
已知平地每一單位面積的年租金是 30 萬元，山坡地每一單位面積的年租金是 20 萬元；
公司一年能夠提供土地租金的上限是 80 萬元。
平地作物 A 的種植成本每單位面積一年是 40 萬元，
山坡地作物 B 的種植成本每單位面積一年是 50 萬元；
公司一年能夠提供種植成本的上限是 130 萬元。
每年收成後，作物 A 每單位面積的利潤是 120 萬元，作物 B 每單位面積的利潤是 90 萬元。
請問公司一年應租平地和山坡地各多少單位面積，
收成後可以獲得最大利潤？又此時的最大利潤為何？（12 分）
（註：所租土地的面積並不限制一定要是整數單位。）________ 。 【105 數乙】

答：當平地 2 單位和山坡地 1 單位單位面積時，有最大值 330（萬元）
（第三冊第二章線性規劃）

解：

	租金	成本	利潤
A	30	40	120
B	20	50	90
限制	≤ 80	≤ 130	Max

$\Rightarrow$ 限制範圍：$\begin{cases} 30x+20y\le 80 \\ 40x+50y\le 130 \\ x,y\in N\cup\{0\} \end{cases}$

目標函數：$f(x,y)=120x+90y$

(x,y)	$(0,0)$	$\left(\frac{8}{3},0\right)$	$(2,1)$	$\left(0,\frac{13}{5}\right)$
$f(x,y)$	0	320	330	234

當平地 2 單位和山坡地 1 單位單位面積時
有最大值 330（萬元）