105 年大學入學指定科目考試數學甲

第壹部分：選擇題（佔 76 分）

一、單選題（佔 24 分）

1. 請問下列選項中哪一個數值 a 會使得 x 的方程式 $\log a-\log x=\log(a-x)$ 有兩相異實數解？

   (1) $a=1$　(2) $a=2$　(3) $a=3$　(4) $a=4$　(5) $a=5$

2. 下列哪一個選項的數值最接近 $\cos(2.6\pi)$？

   (1) $\sin(2.6\pi)$　(2) $\tan(2.6\pi)$　(3) $\cot(2.6\pi)$　(4) $\sec(2.6\pi)$　(5) $\csc(2.6\pi)$

3. 假設三角形 ABC 的三邊長分別為 $\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=8$、$\overline{AC}=6$。

   請選出和向量 $\overrightarrow{AB}$ 的內積為最大的選項。

   (1) $\overrightarrow{AC}$　(2) $\overrightarrow{CA}$　(3) $\overrightarrow{BC}$　(4) $\overrightarrow{CB}$　(5) $\overrightarrow{AB}$

4. 假設 a、b 皆為非零實數，且座標平面上二次函數 $y=ax^2+bx$ 與一次函數 $y=ax+b$ 的圖形相切。請選出切點所在位置為下列哪一個選項。

   (1) 在 x 軸上　(2) 在 y 軸上　(3) 在第一象限　(4) 在第四象限

   (5) 當 $a>0$ 時，在第一象限；當 $a<0$ 時，在第四象限

二、多選題（佔 24 分）

5. 在座標空間中，點 $P(2,2,1)$ 是平面 E 上距離原點 $O(0,0,0)$ 最近的點。
   請選出正確的選項。

   (1) 向量 $\vec{v}=(1,-1,0)$ 為平面 E 的法向量
   (2) 點 P 也是平面 E 上距離點 $(4,4,2)$ 最近的點
   (3) 點 $(0,0,9)$ 在平面 E 上
   (4) 點 $(2,2,-8)$ 到平面 E 的距離為 9
   (5) 通過原點和點 $(2,2,-8)$ 的直線與平面 E 會相交

6. 座標平面上一矩形，其頂點分別為 $A(3,-2)$、$B(3,2)$、$C(-3,2)$、$D(-3,-2)$。
   設二階方陣 M 為在座標平面上定義的線性變換，可將 A 映射到 B 且將 B 映射到 C。
   請選出正確的選項。

   (1) M 定義的線性變換是鏡射變換　(2) $M\begin{bmatrix}3 & 3\\ -2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$
   (3) M 定義的線性變換將 C 映射到 D 且將 D 映射到 A　(4) M 的行列式值為 -1
   (5) $M^3=-M$

7. 在實數線上，動點 A 從原點開始往正向移動，動點 B 從 8 的位置開始往負向移動。
   兩個動點每一秒一動一次，已知第一秒 A、B 移動的距離分別為 1、4，
   且 A、B 每次移動的距離分別為其前一次移動距離的 $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍。
   令 c_n 為第 n 秒時 A、B 的中點位置。請選出正確的選項。

   (1) $c_1=\frac{5}{2}$　(2) $c_2>c_1$　(3) 數列 $\langle c_{n+1}-c_n\rangle$ 是一個等比數列
   (4) $\lim_{n\to\infty}c_n=2$　(5) $c_{1000}>2$

三、選填題（佔 **28** 分）

A. 投擲一枚均勻銅板 8 次。在最初兩次的投擲中曾經出現過正面的條件下，
8 次投擲中恰好出現 3 次正面的條件機率為________。（化成最簡分數）

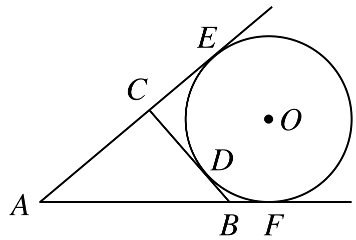
B. 設 $\overline{u}=(1,2,3)$、$\overline{v}=(1,0,-1)$、$\overline{w}=(x,y,z)$為空間中三個向量，
且向量$\overline{w}$與向量$\overline{u}\times\overline{v}$平行。若行列式$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ x & y & z\end{vmatrix}=-12$，則$\overline{w}=$________。

C. 在所有滿足$z-\overline{z}=-3i$的複數z中（其中$\overline{z}$為z的共軛複數，$i=\sqrt{-1}$），
$\left|\sqrt{7}+8i-z\right|$的最小值為________。（化成最簡分數）

D. 一圓盤分成標有數字 0、1 的兩區域，且圓盤上有一可轉動的指針。
已知每次轉動指針後，前後兩次指針停在同一區域的機率為$\dfrac{1}{4}$，
而停在不同區域的機率為$\dfrac{3}{4}$。遊戲規則為連續轉動指針三次，
計算指針在這三次所停區域的標號數字之和。
若遊戲前指針的位置停在標號數字為 1 的區域，
則此遊戲的期望值為________。（化成最簡分數）

第貳部分：非選擇題（佔 **24** 分）

1. 如圖，已知圓O與直線BC、直線AC、直線AB均相切，
且分別相切於D、E、F。又$\overline{BC}=4$、$\overline{AC}=5$、$\overline{AB}=6$



(1) 假設$\overline{BF}=x$，試利用x分別表示$\overline{BD}$、$\overline{CD}$以及$\overline{AE}$，
並求出x之值。

(2) 若將$\overline{AD}$表示成$\alpha\overline{AB}+\beta\overline{AC}$，則$\alpha$、$\beta$之值為何？

2. 設三次實係數多項式$f(x)$的最高次項係數為a。
已知在$0\le x\le 3$的範圍中，$f(x)$的最大值 12 發生在$x=0$、$x=2$兩處。
另一多項式$G(x)$滿足$G(0)=0$，以及對任意實數s、r（$s\le r$），
$\int_s^r f(t)\,dt=G(r)-G(s)$恆成立，且函數$y=G(x)$在$x=1$處有（相對）極值。

(1) 試描繪$y=f(x)$在$0\le x\le 3$的範圍中可能的圖形，
在圖上標示$(0,f(0))$、$(2,f(2))$，並由此說明a為正或負。

(2) 試求方程式$f(x)-12=0$的實數解（如有重根須標示），
並利用$y=G(x)$在$x=1$處有極值，求a之值。

(3) 在$0\le x\le 2$的範圍中，求$G(x)$之最小值。

105 年大學入學指定科目考試數學甲

選擇題：1.(5)　2.(3)　3.(4)　4.(1)　5.(2)(3)　6.(2)(3)(5)　7.(1)(4)

選填題：A. $\frac{3}{16}$　B. $(1,-2,1)$　C. $\frac{19}{2}$　D. $\frac{21}{16}$

非選擇題：1. (1) $\overline{BD}=x$、$\overline{CD}=4-x$、$\overline{AE}=9-x$、$x=\frac{3}{2}$　(2) $\overrightarrow{AD}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$

2. (1)圖略，$a<0$　(2) 根為 0、2、2，$a=-12$　(3) $G(x)$之最小值 0