命題教師：廖心琳、李吉彬　　班級：______座號：______姓名：______________

n 為答對格數，$f(n)=\begin{cases} 8n & ,n\le 10 \\ 3n+50 & ,11\le n\le 17 \end{cases}$，本試卷得分超過100分以100分計。

第一部份：須寫出簡略過程，答案須化至最簡。

1. 求點 $P(-4,7)$ 關於直線 $L:x-2y+3=0$ 的投影點坐標。__________

2. 求過兩直線 $x+2y=5$ 和 $2x-y=5$ 的交點，且與直線 $3x-4y=7$ 垂直的直線方程式。
____

3. 設 k 為實數，則當 k=__________時，$|ki-2+2i|+|ki-4+8i|$ 有最小值。

4. 多項式 $f(x)$ 可被 $(x-3)$ 整除，以 (x^2-x+1) 除之的餘式為 $2x+1$
求 $f(x)$ 除以 $(x-3)(x^2-x+1)$ 的餘式。__________

5. 求方程式 $2x^3+5x^2+x-2=0$ 之有理根。__________

6. $y=-x^2+2x+2$ 且 $-3\le x\le 2$，求 y 的最小值。__________

7. 二次函數 $f(x)=kx^2+4x+k$ 的圖形恆在 x 軸下方，求 k 的範圍。__________

8. 實係數多項式 $f(x)$，已知 $f(5-3i)=1+4i, f(i)=1-\sqrt{3}$，求 $f(5+3i)+f(-i)$。
____

9. $1+3i$ 為 $x^4-3x^3+6x^2+2x-60=0$ 的一根，求此方程式的所有實數根。__________

10. 已知 $f(x)=x^3+ax^2-4x+2$，$g(x)=x^3+bx^2-2$ 的最高公因式為2次，求數對(a,b)。
____

11. 已知有理係數多項式 $f(x)$ 的次數為5次，若 $f(i)=f(1-\sqrt{3})=0$ ，
求 $y=f(x)$ 的圖形與x軸的交點數。__________

12. $f(x)=(1+2x+3x^2+\cdots+50x^{49})(2x^2+4x^4+6x^6+\cdots+50x^{50})$ ，
展開後 x^{47} 項係數= $16\times 23\times k$ ，求k值。__________

13. 已知多項式 $f(x)$ 的次數為3次，若 $f(2007)=2, f(2008)=f(2010)=0, f(2011)=-44$ ，
求 $f(2009)$ 。__________

14. 多項式 $f(x)$ 除以 $(2x-1)$ 的商為 $q(x)$ ，餘式為3，
求 $(x+1)f(\frac{x}{2})$ 除以 $(x-1)$ 的商____________________，餘式__________

15. 方程式 $x^2+ax+a+3=0$ 的二根為 α,β 滿足 $0<\alpha<1<\beta<2$ ，求a值範圍。__________

16. $f(x+1)=16x^3+120x^2+290x+222$ ， $f(x)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$
求 $f(-0.999)$ 值。(四捨五入取近似值到小數點以下第三位)__________

第二部份：加分題(9分。須寫出計算過程。)

17. 解方程式 $x^3-6x^2+18x-18=0$ 的解。(註：均非有理根)

如果你不想在星期六還要看到數學老師，請仔細把考卷寫完。

(正反面均有試題)

台中一中97學年度第一學期期末考一年級數學科試題加分題參考解答

解方程式 $x^3-6x^2+18x-18=0$ 的解。(註：均非有理根)

卡當解法：先平移消二次項，再與 $(u+v)^3=(u^3+v^3)+3uv(u+v)$ 比較係數。

(1)令 $x=y+2$
得 $(y+2)^3-6(y+2)^2+18(y+2)-18=0$
即 $y^3+6y+2=0$

(2)令 $y=u+v$
得 $y^3=(u+v)^3=(u^3+v^3)+3uv(u+v)=(u^3+v^3)+3uvy$
即 $y^3-3uvy-(u^3+v^3)=0$
與 $y^3+6y+2=0$ 比較係數

(3) $\begin{cases} uv=-2 \\ u^3+v^3=-2 \end{cases}$

$v=\dfrac{-2}{u}$ 代入 $u^3+v^3=-2$ 得 $u^3+\left(\dfrac{-2}{u}\right)^3=-2\Rightarrow u^6+2u^3-8=0\Rightarrow(u^3+4)(u^3-2)=0$

(4)得 y 三根為
$y_1=u+v=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$

$$y_2=u+v=\sqrt[3]{2}\omega-\sqrt[3]{4}\omega^2=\sqrt[3]{2}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)-\sqrt[3]{4}\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{2}\right)\sqrt{3}i$$

$$y_3=u+v=\sqrt[3]{2}\omega^2-\sqrt[3]{4}\omega=\sqrt[3]{2}\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)-\sqrt[3]{4}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{2}\right)\sqrt{3}i$$

(5)故 x 三根為
$x_1=2+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$

$$x_2=2+\left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{2}\right)\sqrt{3}i$$

$$x_3=2+\left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{2}\right)\sqrt{3}i$$